NOM : **Prénom :**

UNIVERSITE PAUL SABATIER

Contrôle continue de Mécanique Quantique

(Durée 45 mn)

I Système à deux états

1°) On considère un système physique dont l'espace des états est à 2 dimensions. Les vecteurs $|1\rangle$ et $|2\rangle$ constituent une base orthonormée de ce système. Un opérateur A est tel que $A|1\rangle = \alpha|1\rangle + i\beta|2\rangle$ et $A|2\rangle = -i\beta|1\rangle + \alpha|2\rangle$ où α et β sont des constantes réelles. Ecrire la matrice de cet opérateur.

$$A_{ij} = \langle i|A|j\rangle \quad \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & -i\beta \\ i\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

2°) Déterminer ses valeurs propres et ses états propres normés. $A|\varphi\rangle = \lambda|\varphi\rangle$

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & -i\beta \\ i\beta & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)^2 - \beta^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \alpha \mp \beta$$

$\rightarrow |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle$

$\rightarrow |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle$

3°) Le système est dans l'état $|1\rangle$. Quels sont les résultats de mesure de la grandeur physique A. En déduire la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen.

$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$ Valeurs propres λ_+ et λ_- avec $\lambda_+ = \alpha+\beta$, $\lambda_- = \alpha-\beta$

Probabilités : $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$

$\langle A\rangle = \alpha$ $\quad \langle A\rangle^2 = \alpha^2+\beta^2$ $\quad \Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} = (\alpha^2+\beta^2-\alpha^2)^{1/2} = \beta$

II Oscillateur harmonique

1°) Donner l'expression du hamiltonien d'un oscillateur harmonique à une dimension selon l'axe Ox en fonction de la variable x.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

2°) On définit les opérateurs a et c tels que $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + \frac{d}{dX})$ et $c = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - \frac{d}{dX})$. Calculer le commutateur $[a, c]$. En effectuant un changement de variable de type $X = \alpha x$, réécrire le hamiltonien de l'oscillateur en fonction des opérateurs a et c. Que vaut la constante α?

$$[a,c] = \frac{1}{2}\left[\left(X+\frac{d}{dX}\right)\left(X-\frac{d}{dX}\right) - \left(X-\frac{d}{dX}\right)\left(X+\frac{d}{dX}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(X^2 - X\frac{d}{dX} + 1 + X\frac{d}{dX} - \frac{d^2}{dX^2}\right.$$

$$\left. - \left(X^2 + X\frac{d}{dX} - X\frac{d}{dX} - 1 - \frac{d^2}{dX^2}\right)\right) = 1 = ac - ca$$

En posant $X = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$ $\quad H = \frac{1}{2}\left(\hbar\omega \frac{d^2}{dX^2} + \hbar\omega X^2\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\left(-\frac{d^2}{dX^2} + X^2\right)$

d'où $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ $\quad H = \hbar\omega\left(ac - \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(ca + \frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}(ac + ca)$$

3°) Montrer que la fonction d'onde $\varphi_n(X) = Ae^{-X^2/2}$ est fonction propre de a et donc fonction propre de H. Quel est le niveau considéré et son énergie ?

$a\,\varphi_n(X) = \frac{A}{\sqrt{2}}(X - X)e^{-X^2/2} = 0$ $\quad$ Valeur propre $= 0$

$\Rightarrow H\,\varphi_n(X) = \hbar\omega\left(ca + \frac{1}{2}\right)\left(Ae^{-X^2/2}\right) = \frac{\hbar\omega}{2}\, Ae^{-X^2/2}$

$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ $\quad (n = 0)$ niveau fondamental

4°) Les états propres du hamiltonien $\varphi_n(X)$ sont notés $|n\rangle$. A l'instant $t = 0$, un oscillateur est dans un état $|\psi\rangle = |1\rangle + i|3\rangle$. Quels sont les résultats possibles pour la mesure de E ? Quelles sont les probabilités associées à ces mesures ? En déduire la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen de E.

$|\psi\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|3\rangle$ $\quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ $\quad$ Mesures possibles $\begin{cases} n=1 & E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \\ n=3 & E_3 = \frac{7}{2}\hbar\omega \end{cases}$

Probabilités $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ $\quad \langle E \rangle = \frac{5}{2}\hbar\omega$ $\quad \delta E = \hbar\omega$

5°) Ecrire la fonction d'onde décrivant cet état à l'instant t.

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\,3/2\,\omega t}\,|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\, e^{-i\frac{7}{2}\omega t}\,|3\rangle$$